Appunti sulla valutazione dei titoli obbligazionari

ad uso del corso di Economia e Tecnica dei Mercati Finanziari

Marco M. Fumagalli
A.A. 2017-2018

Contents

1. LA RELAZIONE PREZZO-RENDIMENTO

1.1. L'obbligazione come insieme di flussi finanziari

Un titolo obbligazionario non strutturato può essere considerato come un qualsiasi progetto di investimento, che comporta un esborso iniziale (acquisto o sottoscrizione del titolo) e una serie di flussi di cassa succesivi, a data certa e di ammontare certo. In tale situazione, il prezzo dell'obbligazione è dato dalla sommatoria del valore attuale dei singoli flussi, scontati ciascuno al tasso opportuno[1].

Analiticamente:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1 + i_t)^t} \qquad (1)$$

dove:
P ≡ Prezzo dell'obbligazione
i_t ≡ Tasso di interesse per investimenti a t periodi
F_t ≡ Flusso di cassa al tempo t

La caratterizzazione dei flussi di cassa con il termine F_t, sta ad indicare che la (1) comprende le seguenti tipologie di obbligazioni:

- **normali**: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \cdots F_{n-1}$=CEDOLA ("CED"), F_n= CED+VALORE NOMINALE ("VN")
- **rendite perpetue**: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \cdots F_n$ = CED
- ***zero-coupon***: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 \ldots F_{n-1} = 0$, F_n= VN
- **a flusso cedolare irregolare**: i flussi possono assumere i *pattern* più diversi; il loro ammontare è comunque certo.

Il fatto che ciascun flusso venga scontato al tasso corrispondente i_t dipende dal presupposto che, per date future, siano presenti sul mercato diversi tassi di interesse (tassi *spot*).

1.2. Alcuni tassi rilevanti

Dato un titolo obbligazionario, si possono definire alcuni tassi rilevanti che lo caratterizzano[2]:

- **tasso cedolare** (*coupon rate* "CR"): il rapporto tra l'ammontare della cedola ed il valore nominale del titolo;
- **tasso corrente** (*current yield* "CY", detto anche "rendimento immediato"): il rapporto tra l'ammontare della cedola e il prezzo del titolo. Tale tasso, limitatamente alle obbligazioni

[1] Il tasso a cui scontare i flussi dovrà prendere in considerazione anche il rischio di inadempimento (*default*) dell'emittente e quindi, nella pratica, deriverà dalla somma di due separate componenti: il tasso *risk free* disponibile sul mercato per quella data scadenza (tipicamente il tasso di titoli di stato) e da una componente aggiuntiva (*credit spread*) relativa al rischio creditizio. In generale tale rischio è misurato dal *rating* di una agenzia, così che emittenti con uguale *rating* dovrebbero mostrare sul mercato *credit spread* simili.
[2] I primi due tassi sono significativi solo per le obbligazioni a cedola costante.

normali, non tiene conto di perdite o guadagni in conto capitale, ossia la differenza tra prezzo e valore di rimborso;

- **tasso di rendimento effettivo a scadenza** (ovvero *yield to maturity* "YTM"); può essere interpretato in due modi:
  - come misura *ex ante* del rendimento a scadenza: il tasso di rendimento che eguaglia il montante del prezzo con la sommatoria dei montanti dei flussi:

$$P(1+YTM)^n = \sum_{t=1}^{n} F_t\,(1+YTM)^{n-t} \tag{2}$$

interpretato in tal senso, lo YTM indica il rendimento realizzabile acquistando un obbligazione al prezzo P, e che dà diritto ai flussi F_t (t=1,2,...,n), a condizione che il titolo sia mantenuto in portafoglio fino a scadenza e tutti i flussi siano reinvestiti al medesimo tasso, lo YTM, fino alla scadenza del titolo;

  - come rappresentazione sintetica dei tassi spot (i_t); per vedere meglio questa caratterizzazione dello YTM riscriviamo la (2) dividendo entrambi i membri per il termine $(1+YTM)^n$; così facendo otteniamo:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+YTM)^t} \tag{3}$$

dalla (1.3) si ricava che lo YTM è altresì definibile come il tasso di rendimento che rende uguale il valore attuale di tutti i flussi futuri dell'obbligazione al prezzo di mercato della stessa. Se sostituiamo la (1) nella (3), si può vedere come lo YTM dipenda sia dai tassi di mercato (i_t) che dalla particolare configurazione dei flussi F_t che caratterizza l'obbligazione in questione:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i_t)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+\mathrm{YTM})^t} \tag{4}$$

Possiamo quindi concludere che lo YTM, *ex ante*, è una media dei tassi spot, ponderata per i flussi F_t.

Esempio 1

Consideriamo un'obbligazione dalle seguenti caratteristiche:

- CED=10
- VN=100
- P=105
- n=2

Calcoliamo i tassi rilevanti:

- CR=10/100=10%
- CY=10/105≅9,5%
- il calcolo dello YTM richiede di risolvere la seguente equazione:

$$105 = \frac{10}{(1+\mathrm{YTM})^1} + \frac{110}{(1+\mathrm{YTM})^2}$$

da cui:
YTM≅7,2%
Per un'obbligazione con scadenza superiore a 3 periodi, il calcolo del relativo YTM richiede di risolvere equazione di grado superiore al terzo. Tali equazioni sono facilmente risolvibili con i procedimenti numerici propri dei fogli di calcolo *Lotus* o *Excel*. ♦

A seconda del rapporto tra la quotazione dell'obbligazione ed il suo valore nominale si possono verificare le seguenti relazioni:

P=VN (*par bond*) ⇒ CR=CY=YTM
P>VN (*premium bond*) ⇒ CR>CY>YTM
P<VN (*discount bond*) ⇒ CR<CY<YTM

1.3. La forma della relazione prezzo-rendimento

Allo scopo di introdurre la forma della relazione prezzo-rendimento nel modo più semplice possibile, consideriamo una rendita perpetua. Le stesse conclusioni possono comunque essere generalizzate a qualunque tipo di titolo a reddito fisso.
Come già detto, una rendita perpetua garantisce il pagamento di un flusso infinito di cedole costanti, senza che mai si abbia il rimborso del capitale. Per un'obbligazione con queste caratteristiche, assumendo[3] $i_1 = i_2 = \ldots = i_n = i$, la (1) si semplifica nel modo seguente[4]:

$$P = \frac{CED}{i} \tag{1a}$$

Dalla (1a) si evince facilmente che il prezzo della rendita perpetua sia funzione inversa del tasso di interesse i. Da un punto di vista economico, il ragionamento è il seguente: un aumento del tasso di interesse rende non convenienti i titoli in circolazione; i possessori, quindi, vorranno disfarsene, ma nessuno sarà disposto a comprarli. L'eccesso di offerta farà diminuire il prezzo finchè il relativo CY sarà uguale a quello dei titoli di nuova emissione[5].

Oltre ad essere inversa, la relazione prezzo-rendimento è anche convessa (figg. 1 e 2).
Ciò vuol dire che per incrementi costanti del tasso di interesse, le riduzioni di prezzo sono via via decrescenti. Al limite, per $i \to \infty$, $P \to 0$. Poiché il prezzo non può essere inferiore a zero, ed essendo la relazione continua, le riduzioni di prezzo all'aumentare del tasso di interesse devono essere decrescenti.

---

[3] Si ipotizza cioè una struttura piatta dei tassi *spot* (vedi oltre).
[4] Per una dimostrazione formale vedi l'Appendice 1
[5] Nel caso di un *coupon bond* alla pari, la diminuizione del prezzo rende possibile un *capital gain* il quale compensa la perdita di competitività del titolo in termini di *coupon rate*.

Nel caso, sin qui considerato, della rendita perpetua, si ha che per $i \rightarrow 0$, $P \rightarrow \infty$ (fig. 1): la sommatoria di una serie infinita di cedole non attualizzate tende ad infinito.

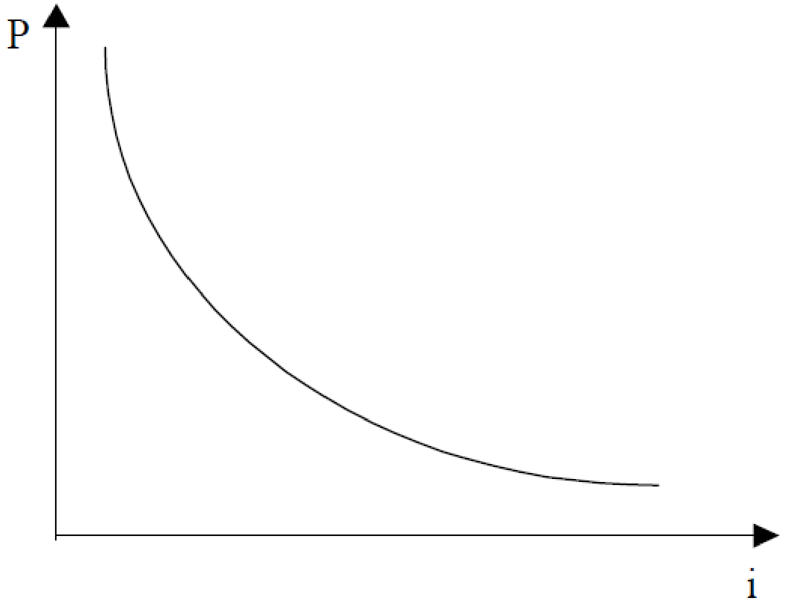

Figura 1: la relazione prezzo-tasso di interesse per una rendita perpetua

Nel caso di un qualsiasi altro tipo di obbligazione non strutturata, per esempio un *coupon bond*, per $i \rightarrow 0$, P tende ad un valore finito: tale valore, prorpio perché il tasso di interesse tende a 0, è uguale alla sommatoria dei flussi F_t non attualizzati (fig.2).

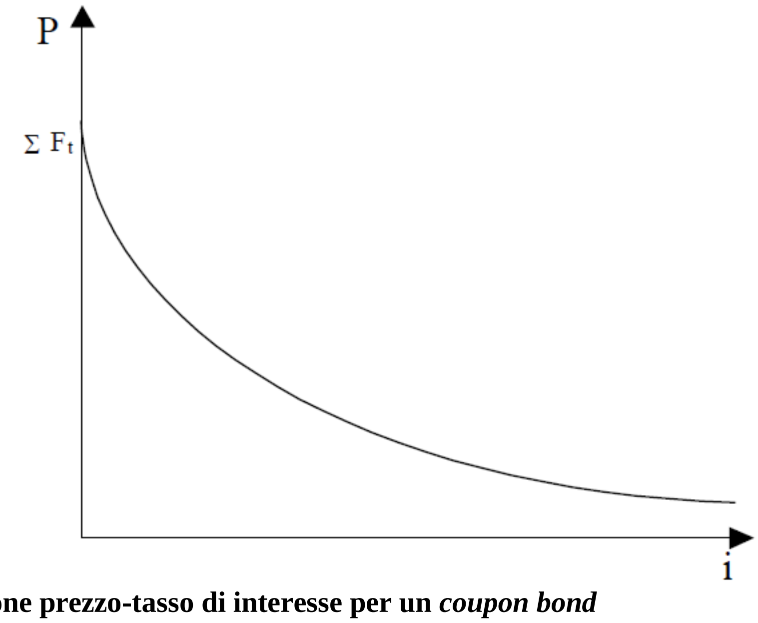

Figura 2: la relazione prezzo-tasso di interesse per un *coupon bond*

Esempio 2

Consideriamo una rendita perpetua con cedola pari a 10. Calcoliamo i prezzi e le variazioni di prezzo per diversi livelli del tasso di interesse:

- $i=8\% \Rightarrow P=10/0,08=125$
- $i=10\% \Rightarrow P=10/0,1=100$
- $i=12\% \Rightarrow P=10/0,12=83,33$

Si vede facilmente che all'aumentare del tasso di interesse i, il prezzo della rendita perpetua diminuisce. Inoltre, le riduzioni del prezzo sono via via minori:
• dall'8% al 10%: -25
• dal 10% al 12%: -16,67 ♦

2. MISURE DI SENSITIVITÀ AI MOVIMENTI DEI TASSI (DURATION, CONVESSITÀ)

Intuitivamente, la variazione del prezzo di un titolo indotta da un mutamento dei tassi di mercato sarà tanto maggiore quanto maggiore è la 'durata' del titolo stesso. Infatti, quanto più lontana nel tempo è la scadenza, tanto maggiore sarà l'effetto che i differenziali tra i rendimenti ottenibili sul mercato alle nuove condizioni e quelli impliciti nel prezzo del titolo, genereranno.

Al fine di individuare con maggiore precisione i fattori da cui dipende la variabilità di prezzo di un'obbligazione non strutturata, introduciamo due categorie di indici: gli indici temporali e gli indici di variabilità veri e propri. Le relazioni esistenti tra le suddette categorie di indici verranno adeguatamente messe in evidenza.

2.1. Indici temporali

L'indice temporale più intuitivo è rappresentato dalla **vita residua**, ossia il numero di periodi mancanti alla scadenza del titolo. Nella sua semplicità, tale indice soffre dello svantaggio di considerare solamente l'ultimo flusso finanziario del titolo considerato; in altri termini, la vita residua non tiene conto della distribuzione temporale dei flussi.

La distribuzione temporale dei flussi è fondamentale nel determinare la variabilità di prezzo di un titolo. Ciò che conta, infatti, è l'applicazione delle variazioni dei tassi di mercato ai diversi flussi, alle diverse scadenze.
La distribuzione temporale dei flussi di cassa di un titolo è generalmente sintetizzata nel valore della sua ***duration*** (o durata media finanziaria). Essa rappresenta una media ponderata delle scadenze (residue) dei flussi finanziari dell'obbligazione. La *duration*, nella formulazione di Macaulay, è data dalla formula seguente:

$$D = \sum_{t=1}^{n} t \; \frac{F_t}{P\,(1+\,i_t)^t} \qquad (5)$$

In quanto media ponderata delle scadenze, la *duration* dipende:
- dalla distribuzione delle scadenze; per un obbligazione che abbia flussi ad ogni scadenza, la *duration* dipende dalla vita residua; la *duration* di un *coupon bond* a 10 anni è più elevata della *duration* di un *coupon bond* a 5 anni;
- dalla distribuzione dei flussi finanziari F_t; quanto maggiore è il peso delle scadenze più lontane, tanto più grande è la *duration*; la *duration* di uno *zero coupon* a 10 anni è più

elevata di quella di un *coupon bond* a 10 anni[6]; allo stesso modo, a parità di vita residua, la *duration* di un *coupon bond* con CR pari al 10% è meno elevata di quella di un *coupon bond* con CR pari al 5%;

- dall'insieme dei tassi spot $(i_1, i_2, \dots i_n)$, poiché questi influenzano il valore attuale dei flussi.

Per concludere, vale la pena di sottolineare che il concetto di *duration* è più ampio di quello di vita residua, in quanto considera l'intera distribuzione dei flussi di un'obbligazione e non solo l'ultimo flusso. Quando, come nel caso di uno *zero coupon*, sono assenti flussi intermedi, i due indici coincidono. Altrimenti, la *duration* di un'obbligazione non strutturata è sempre minore della vita residua.
Nel seguito, comunque, si considererà la cosidetta *flat yield curve duration*, nella quale si ipotizza una struttura dei tassi per scadenza piatta e quindi un unico tasso di interesse per l'attualizzazione dei flussi; i pesi diventano:

$$D = \sum_{t=1}^{n} t \; \frac{F_t}{P\,(1+i)^t} \qquad (5)$$

Esempio 3
Calcoliamo la *duration* di un titolo dalle seguenti caratteristiche:
- $i=10\%$
- $F_1=10$, $F_2=30$, $F_3=20$

Preliminarmente, osserviamo che la vita residua dell'obbligazione è pari a 3.
Per calcolare la *duration* è necessario conoscere il prezzo del titolo:

$$P = \frac{10}{(1{,}1)^1} + \frac{30}{(1{,}1)^2} + \frac{20}{(1{,}1)^3} = 48{,}9$$

noto il prezzo, la *duration* può essere calcolata come media ponderata delle scadenze (ossia 1, 2 e 3) con i pesi dati dal valore attuale dei flussi, rispettivamente 10, 30 e 20, rapportati al prezzo:

$$D = 1 * \frac{10\,(1{,}1)^{-1}}{48{,}9} + 2 * \frac{30\,(1{,}1)^{-2}}{48{,}9} + 3 * \frac{20\,(1{,}1)^{-3}}{48{,}9} = 2{,}1$$

Si può vedere come la *duration* sia inferiore alla vita residua. ♦

Un altro indice temporale molto usato è la **dispersione**. In particolare, introduciamo la dispersione intorno allo zero[7] in quanto tornerà utile quando analizzeremo il concetto di convessità.

$$D^2(0) = \sum_{t=1}^{n} t^2 \; \frac{F_t}{P\,(1+i)^t} \qquad (6)$$

[6] Basti pensare allo *zero coupon* come un *coupon bond* con CR dello 0%.
[7] Nel seguito faremo riferimento semplicemente alla dispersione.

Si tratta, quindi, della media ponderata del quadrato delle scadenze, con i pesi uguali a quelli della *duration*. Conseguentemente, l'indice è espresso in unità di tempo al quadrato. Per riportarlo in unità di tempo normali bisogna fare la radice quadrata.

2.2. Indici di variabilità

Analizzeremo i seguenti indici di variabilità: *modified duration* e *effective duration*

Abbiamo visto come la relazione prezzo-tasso di interesse sia inversa ed anche convessa. Molto importante, essa è anche continua, quindi, derivabile.

Il concetto di derivata costituisce un punto di partenza naturale per la costruzione di un indice di variabilità; la derivata, infatti, indica la variazione della variabile dipentente, in questo caso il prezzo, per una variazione infinitesima della variabile indipendente, il tasso di interesse.

Definiamo ***modified duration*** il rapporto, preso con il segno meno, tra la derivata del prezzo rispetto al tasso ed il prezzo medesimo[8]. Rimandando all'Appendice 2 per una dimostrazione formale, vale la seguente relazione:

$$MD = -\frac{\frac{dP}{di}}{P} = \frac{1}{1+i} \mathrm{D} > 0 \qquad (6)$$

La MD è uguale alla *duration* per il termine (1/1+i). Essa indica la variazione, per unità di capitale, del prezzo per una variazione infinitesima del tasso di interesse. Il segno negativo della derivata conferma la natura inversa della relazione prezzo-tasso di interesse. La (6) spiega perché, nonostante in senso stretto sia un indice temporale, la ***duration*** venga utilizzata come un indice, sia pur approssimato, di variabilità.

Se passiamo da variazioni infinitesime a variazioni finite, la (6) diventa:

$$\frac{\Delta P}{\mathrm{P}} = -MD\ \Delta i \qquad (6a)$$

la quale ci dà la variazione relativa approssimata del prezzo per una variazione del tasso pari a Δi. L'approssimazione sarà tanto maggiore quanto maggiore è Δi. In questa formula la MD è calcolata con la (6).

Per spiegare il perché dell'approssimazione si ricordi che la derivata di una funzione in un punto è rappresentabile graficamente come la tangente in quel particolare punto (fig. 3). Utilizzare la (6a) al

[8] Alcuni testi definiscono la MD come il rapporto tra la derivata ed il prezzo, senza il segno meno. Si è qui preferito considerare il segno meno, così che la MD assuma lo stesso segno della *duration*.

fine di determinare le variazioni di prezzo equivale ad ipotizzare che i prezzi dei titoli varino in maniera lineare al variare dei tassi di interesse.

In realtà, come detto, la relazione tra prezzo e tasso di interesse non è lineare, bensì convessa. Ne deriva che, ogni volta che si utilizza la (6a), si otterranno buone stime delle variazioni dei prezzi solo per variazioni molto piccole dei tassi di interesse. Se invece le variazioni dei tassi sono consistenti si otterranno stime delle variazioni del prezzo distorte ed, in particolare: (i) in caso di diminuzione dei tassi di mercato, si otterranno stime degli incrementi di prezzo minori di quelli effettivi, mentre (ii) in caso di aumento dei tassi di interesse, si otterranno stime dei decrementi del prezzo maggiori di quelli effettivi. Ne consegue che i prezzi dei titoli risulteranno sistematicamente sottostimati.

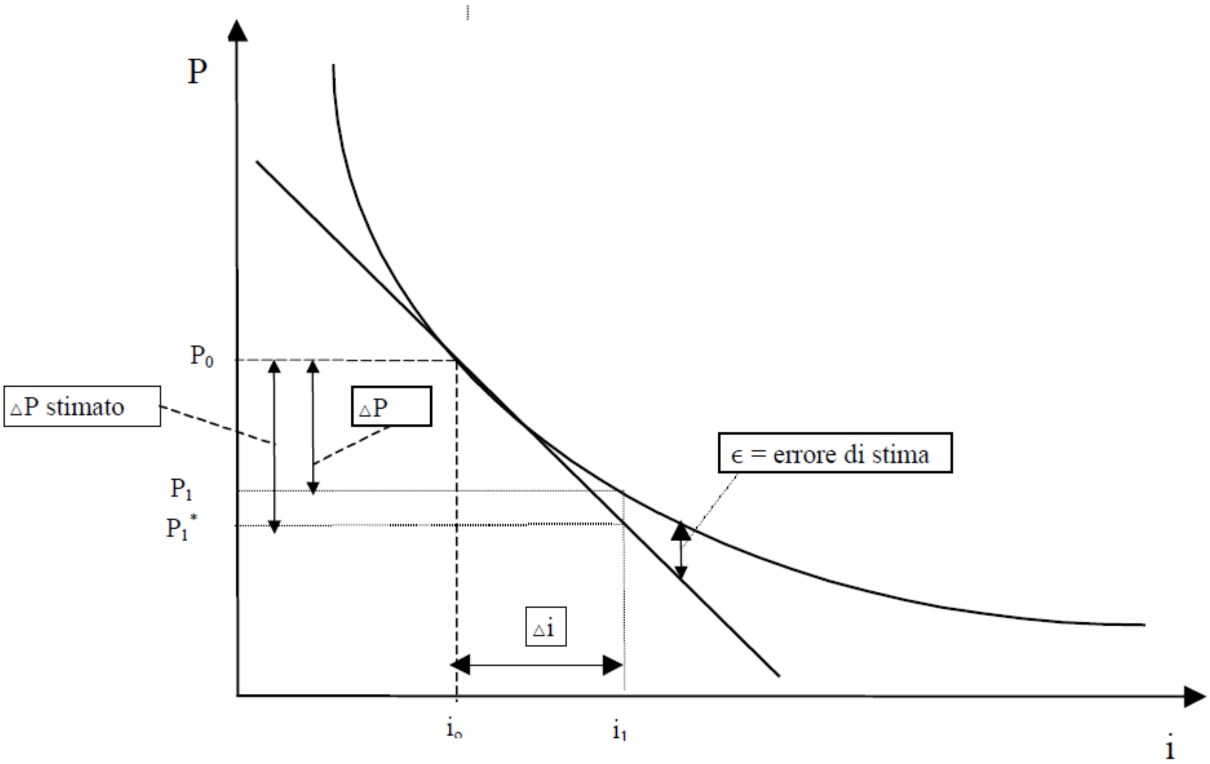

Figura 3 - approssimazione dell'indice di variazione relativa

Nella figura 3, ad esempio, partendo dal punto di equlibrio iniziale (P_0, i_0) ad un incremento del tasso di interesse pari a Îi corrisponderà una effettiva diminuzione del prezzo del titolo pari alla distanza verticale tra P_0 e P_1. La stima della diminuzione del prezzo a cui si perviene utilizzando la (6a) è maggiore, ed è pari alla distanza verticale tra P_0 e P_1

Al fine di eliminare l'approssimazione insita nella necessità di utilizzare variazioni finite della variabile i, si può esprimere la variazione di prezzo come uno sviluppo in serie di Taylor:

$$\Delta P = \frac{1}{1!}\frac{dP}{di}\Delta i + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{di^2}(\Delta i)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3P}{di^3}(\Delta i)^3 + \cdots \qquad (7)$$

dividendo entrambi i membri per P otteniamo la variazione relativa del prezzo:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{1!}\frac{dP/di}{P}\Delta i + \frac{1}{2!}\frac{d^2P/di^2}{P}(\Delta i)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3P/di^3}{P}(\Delta i)^3 + \cdots \qquad (8)$$

E' chiaro che quanti più termini della (8) si considerano per la determinazione della variazione relativa, tanto minore risulta l'approssimazione. E' prassi considerare i primi due termini della (8). Il primo termine coincide con la (6a). Il secondo è funzione della c.d. **convessità**[9]:

$$C = \frac{d^2P/di^2}{P} = \frac{1}{(1+i)^2}\left(\mathrm{D} + D^2(0)\right) > 0 \qquad (9)$$

Poiché la funzione del prezzo è convessa, la derivata seconda è sempre positiva e conseguentemente la convessità è positiva. Dalla (9) si vede che la convessità è funzione della *duration* e della dispersione. A parità di *duration*, un'obbligazione con una dispersione maggiore ha una convessità maggiore.

Possiamo dunque riscrivere la (6a) aggiungendo un secondo termine nel modo seguente:

$$\frac{\Delta P}{\mathrm{P}} = -MD\,\Delta i + C\,\frac{(\Delta i)^2}{2} \qquad (10)$$

Se, come detto e come visibile dalla figura 3, l'utilizzo della (6a) conduceva a sottostimare sistematicamente il prezzo del titolo, ossia le variazioni in aumento venivano sottostimate e quelle in diminuizione sovrastimate, l'aggiunta di un termine positivo riduce l'approssimazione.

Esempio 4
Consideriamo un *coupon bond* dalle seguenti caratteristiche:
- CR=10%
- n=2
- P=100

Il tasso di interesse è pari al 10%.
La *duration* di questo titolo è data da:

$$D = \frac{1}{100}\left(1\,\frac{10}{1{,}1} + 2\,\frac{110}{1{,}21}\right) = 1{,}91$$

[9] Per una derivazione della (9) si veda l'appendice 2.

Consideriamo ora uno *zero coupon* con vita residua, e quindi *duration*, pari a 1,91. Per valutare quale dei due titoli abbia una convessità maggiore, calcoliamo la dispersione dei 2 titoli. Per il *coupon bond* abbiamo:

$$D^2(0) = \frac{1}{100}\left(1^2\,\frac{10}{1{,}1} + 2^2\,\frac{110}{1{,}21}\right) = 3{,}72$$

mentre per lo *zero coupon* abbiamo:

$$D^2(0) = (1{,}91)^2 = 3{,}64$$

Se confrontiamo due titoli, un *coupon bond* ed uno *zero coupon*, con uguale *duration*, il *coupon bond* ha una dispersione ed una convessità maggiore. Ciò vuol dire che, a parità di *duration*, il calcolo della variabilità fatto con la (2.9a) risulta più approssimato per un *coupon bond* piuttosto che per uno *zero coupon*.♦

2.3. *Effective duration* ed *effective convexity*

Un altro indice di variabilità molto usato dagli operatori è la ***effective duration*** (ED).

Possiamo definire la ED in maniera formalmente simile alla MD. Sostituiamo alla derivata del prezzo rispetto al tasso di interesse, il relativo rapporto incrementale e con una semplice variazione nella disposizione delle variabili P e Δi, otteniamo la ED come rapporto tra la variazione relativa del prezzo e la variazione del tasso di interesse:

$$ED = -\frac{\Delta P/P}{\Delta i} > 0 \qquad (11)$$

La ED, quindi, misura la variazione relativa del prezzo per una variazione di un punto base del tasso di interesse.

Si puo modificare la (11) considerando due variazioni di pari ammontare del tasso di interesse, una in diminuizione e l'altra in aumento, a cui corrispondono due diversi prezzi ($P_+ > P_-$)

$$ED = -\frac{(P_+ - P_-)/P_0}{2\,\Delta i} > 0 \qquad (11a)$$

Mentre la MD è funzione di un altro indice quale la *duration*, la (11a) determina la variazione relativa del prezzo a partire da P_+ e P_-, calcolati utilizzando una formula del prezzo come la (1).

Una volta calcolato l'indice ED, analogamente alla (6a) per conoscere la variazione relativa approssimata del prezzo basta moltiplicare tale indice per la variazione ipotizzata del tasso di interesse.

In maniera analoga può essere definita la ***effective convexity*** (EC):

$$EC = -\frac{(P_+ + P_- - 2P_0\ )/P_0}{\Delta i^2} > 0 \qquad (12)$$

la quale fornisce un valore approssimato della convessità.

Per calcolare meno approssimativamente la variazione relativa del prezzo possiamo utilizzare la (10), ove al posto della MD e della convessità, utilizziamo la ED e la EC.

3. LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI DI INTERESSE

3.1. I tassi spot e la term structure curve (zero coupon yield curve)

I tassi spot sono i rendimenti effettivi a scadenza di investimenti che non prevedono flussi intermedi, cioè di *zero coupon.* Titoli privi di cedole con uguale scadenza non possono avere, in equilibrio ed a parità di altre condizioni (qualità dell'emittente, etc.) tassi spot diversi.

I tassi spot sono quelli utilizzati per determinare il valore dei titoli obbligazionari con flussi intermedi: ogni flusso di cassa viene attualizzato allo specifico tasso spot relativo alla scadenza ad esso associata. In pratica, il metodo di valutazione consiste nello spezzare il *coupon bond* in un portafoglio di *zero coupon* e di utilizzare quindi i tassi spot corrispondenti. E' il metodo utilizzato nella (1).

Purtroppo, però, sul mercato esistono pochi titoli *zero coupon* a lunga scadenza (i mercati degli *zero coupon* più liquidi sono quelli su titoli di Stato al massimo a due anni) e pertanto non è direttamente costruibile una curva che esprima tale relazione per durate lunghe. E' possibile, in ogni caso, ottenere la *term structure* indirettamente, attraverso un metodo iterativo che calcola i tassi spot impliciti nei titoli con cedola (tipicamente BTP nel mercato italiano) partendo dai prezzi di mercato dei titoli medesimi e dai tassi spot espliciti nei titoli a breve scadenza (metodo del *bootstrapping*).

Il procedimento è il seguente. Supponiamo che sul mercato esista un solo *zero coupon*, con scadenza ad un anno e prezzo pari a P_1 (in generale, P_n è il prezzo di un titolo con vita residua pari a n). Dato P_1 si determina immediatamente il tasso *spot* ad un anno[10].

Dati i_1 e P_2, dalla (2.1) si può ricavare il valore di i_2. Allo stesso modo si procede per le scadenze più lunghe, a condizione che esistano i titoli corrispondenti: se, per esempio, oltre allo *zero coupon* ad un anno, esistono nel mercato solo *coupon bond* con vita residua pari a due, tre, quattro, cinque e dieci anni, allora sarà impossibile determinare analiticamente i tassi *spot* dal 6_0 al 10_0 anno[11].

---

[10] Dalla (2.1) con n=1, basta esplicitare per i_1.

[11] E' evidente quanto sia irrealistica l'ipotesi di titoli con vita residua esattamente pari ad anni interi. In realtà, il modello proposto permetterà di determinare analiticamente i tassi spot relativi a scadenze quanto più possibili vicine all'anno intero; a partire da questi tassi, sarà poi possibile stimare il tasso *spot* di interesse.

3.2. La *yield curve*

Si è parlato, in precedenza, del concetto di **tasso di rendimento effettivo a scadenza** (YTM) di un titolo. Se si dispone di un campione significativo di titoli su cui sono stati calcolati gli YTM, diventa possibile rappresentare graficamente la relazione tra YTM e vita residua attraverso quella che, normalmente, viene chiamata ***yield curve.***

Poichè esistono titoli solo su alcune vite residue e non è possibile pertanto disporre di un intervallo continuo di scadenze, per la costruzione del grafico occorrerà giocoforza procedere ad interpolazioni che rendono la forma della *yield curve* funzione delle tecniche statistiche utilizzate.

E' stato già detto che lo YTM è una media dei tassi spot, ponderata per i flussi F_t. Ciò equivale a dire che, per una data scadenza, lo YTM non è unico. Anzi, ad ogni scadenza corrispondono infiniti YTM, uno per ogni possibile sequenza dei flussi F_t. Per spiegare questo concetto facciamo ricorso ad un esempio.

Esempio 5
Consideriamo un *coupon bond* con vita residua pari a 3 anni, quotato alla pari e CR del 10%. La struttura dei tassi spot è la seguente: i_1=9,5%, i_2=10%, i_3=10,0184. Lo YTM è pari al 10%.

Consideriamo adesso un *coupon bond* con pari vita residua (3 anni) e CR del 9%. Lo YTM è pari al 10,0015%

Senza perdita di generalità possiamo considerare uno *zero coupon* a 3 anni[12]. Per questo titolo lo YTM è pari a 10,0184%. Per n=3, esistono quindi infiniti YTM, uno per ogni CR ipotizzabile. ♦

E' comunque possibile, per ciascuna vita residua, determinare il corrispondente YTM, come tasso cedolare di un *coupon bond* della medesima durata con cedole costanti che possa emesso alla pari.

In altri termini, trattasi del CR che, data una certa vita residua, permette al titolo di essere emesso alla pari. A queste condizione la *yield curve* è unica (***par coupon yield curve***), ma mantiene un valore sostanzialmente segnaletico e non operativo.

3.3. I tassi forward

I **tassi *forward*** sono definiti come i tassi di interesse di operazioni che trovano esecuzione in una data posteriore rispetto a quella di stipula. Essi sono impliciti nell'insieme dei tassi *spot*.

Investire un euro al tasso spot i_t per t periodi e contemporaneamente investire il relativo montante, ossia $(1+i_t)_t$ euro, per i periodi che vanno da t a t+j, deve essere finanziariamente equivalente ad investire una lira al tasso spot i_{t+j} per t+j periodi:

$$(1+\ i_t)^t\,(1+f_{tj})^J =\ (1+\ i_{t+j})^{t+j} \qquad (13)$$

[12] Logicamente possiamo pensare ad uno *zero coupon* come ad un *coupon bond* con CR dello 0%.

dove:
$f_{tj} \equiv$ il tasso di interesse a j periodi fissato oggi per investimenti effettuati alla fine del tempo t.

Dalla (13) è possibile ricavare la formula del tasso forward f_{tj}:

$$f_{tj} = \left(\frac{(1+ i_{t+j})^{t+j}}{(1+ i_t)^t}\right)^{1/j} - 1 \quad (14)$$

Grazie alla (14), dunque, possiamo ricavare i tassi forward a j periodi (j=1,2,...,m) per investimenti effettuati tra t periodi (t=1,2,...,n). Per **curva dei tassi *forward*** si intende l'insieme dei tassi *forward* f_{t1}, ossia i tassi ad un periodo per investimenti effettuati tra t periodi (t=1,2,...,n).

3.4. Relazioni tra i diversi tipi di tassi

Esistono delle relazioni ben precise tra le diverse tipologie di tassi sin qui introdotte. In generale, si può dimostrare che la curva dei tassi spot (che in questo contesto possiamo anche chiamare efficacemente *zero coupon yield curve*) crescente si trova al di sopra della *par coupon yield curve* (fig.4), ma al di sotto della curva dei tassi *forward*. Viceversa se la *zero coupon yield curve* è decrescente. Vediamo perché nell'ipotesi di una *zero coupon yield curve* crescente (n=2).

Poiché lo YTM a 2 anni è una media tra il tasso spot ad 1 anno, più basso, e quello a 2 anni, più alto, esso risulterà inferiore al tasso spot a 2 anni (i_2). Al contrario, poiché il termine ($1+i_2$) è equiparabile alla media geometrica dei termini ($1+i_1$) e ($1+{}_1f_1$), ed il primo termine è inferiore alla media medesima, allora il secondo termine deve essere superiore alla media, ossia ${}_1f_1>i_2$

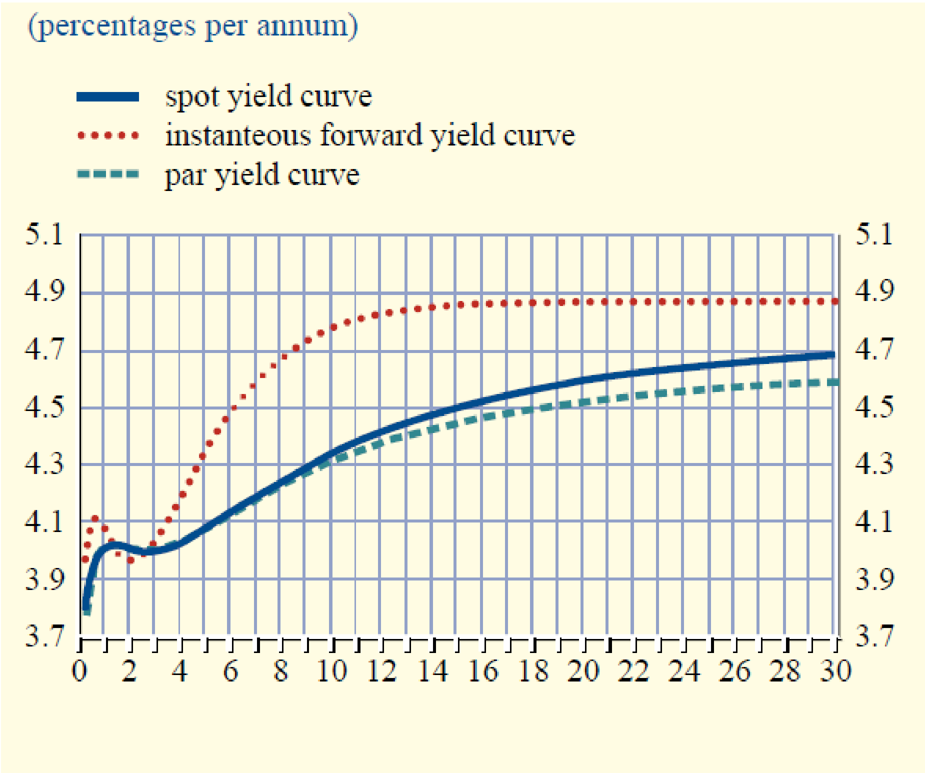

Figura **4: Esempio di relazioni tra le curve dei tassi risk free sull'Euro al 14 Dicembre 2007. Fonte ECB**

La Banca Centrale Europea fornisce giornalmente le curve relative all'area Euro sul proprio sito internet all'indirizzo: http://www.ecb.de/stats/money/yc/html/index.en.html.
La relativa metodologia di calcolo è accuratamente descritta.

3.5. La forma della curva dei tassi spot

Esistono quattro principali teorie che tentano di spiegare la relazione tra scadenza e tassi *spot*.

La prima è la **teoria delle aspettative pure**, secondo cui i tassi che ad un determinato momento si possono osservare per investimenti a scadenze future dipendono dalle aspettative degli operatori sull'andamento futuro dei tassi a breve termine. Ovvero, tornando alla formula (2.16), i tassi *spot* relativi al periodo t+j sono funzione delle aspettative che gli operatori al tempo 0 si formano circa i tassi per investimenti di durata j che si verificheranno al tempo t.
Ne consegue che, se ci si aspetta che i tassi *spot* futuri cresceranno, la curva *spot* sarà crescente, mentre sarà decrescente in caso di aspettative di tassi decrescenti. Il processo di arbitraggio sul mercato porterà all'eguaglianza tra tassi a lungo termine e media geometrica dei tassi a breve.

Secondo la **teoria dei mercati segmentati** esistono differenti relazioni tra domanda e offerta per ogni segmento temporale della curva dei tassi di interesse (causate da preferenze dei soggetti, vincoli regolamentari, restrizione alla concessione di credito su certe scadenze). Ne consegue che livelli di tassi differenti alle varie scadenze riflettono i diversi punti di equilibrio che si verificano su ogni specifico segmento. In questa teoria, gli investitori non sono disposti a scambiare la propria scadenza, indipendenemente dal *gap* tra le aspettative sui tassi ed i tassi effettivamente verificatisi alle varie scadenze.

La **teoria della liquidità** parte dall'ipotesi che gli investitori siano avversi al rischio e che, pertanto, per indurli ad esporsi su scadenze lunghe è necessario offrire tassi a lungo maggiori della media dei tassi *forward* attesi, ovvero un premio per il rischio (crescente al crescere della scadenza degli investimenti). Ne consegue che, a differenza di quanto esposto nella prima teoria, una curva dei rendimenti crescente può non volere dire che ci si aspetta tassi *spot* crescenti, ma che semplicemente gli operatori richiedono un forte premio per il rischio sugli investimenti a lunga scadenza.

La **teoria dell'habitat preferenziale** afferma, al pari della teoria dei mercati segmentati, che ciascun investitore ha una scadenza preferenziale per i propri investimenti. In questa spiegazione, però, gli investitori sono disposti a spostarsi dal proprio segemento-scadenza preferito ad un altro, purchè venga loro riconosciuto un premio. Ne risulta che la forma della curva dei rendimenti è determinata sia dalle aspettative sui tassi, che dal premio (positivo o negativo) necessario per indurre gli operatori a uscire dal proprio segmento preferito.

Appendice 1

A1 La formula del prezzo per una rendita perpetua

Consideriamo una rendita perpetua con cedola costante (CED) posticipata. Vogliamo determinare il prezzo di tale rendita, partendo dalla struttura corrente dei tassi *spot*. Ipotizziamo una struttura piatta dei tassi *spot* ($i_1=i_2=\ldots=i_n=\ldots=i$). In tali circostanze avremo:

$$P=\sum_{1}^{\infty}{}_t\frac{CED}{(1+i)^t}=CED*\sum_{1}^{\infty}{}_t\frac{1}{(1+i)^t} \qquad \text{(A1.1)}$$

Notiamo che la sommatoria $1/(1+i)^t$ ($t=1,2,\ldots,n,\ldots$) è una serie geometrica di ragione pari al fattore di sconto $1/(1+i)$; il fattore di sconto è chiaramente minore di 1. Per semplificare la (A1.1) dobbiamo dunque risolvere una serie geometrica di ragione $1/(1+i)$. Poniamo:

$$\frac{1}{1+i}=v \qquad \text{(A1.2)}$$

e

$$V_n=v+v^2+\ldots+v^n \qquad \text{(A1.3)}$$

Scriviamo la serie V_{n+1} nei due modi seguenti:

$$V_{n+1}=(v+v^2+\ldots+v^n)+v^{n+1}=V_n+v^{n+1} \qquad \text{(A1.3a)}$$

e

$$V_{n+1}=v+(v^2+\ldots+v^n+v^{n+1})=v+v*V_n \qquad \text{(A1.3b)}$$

Uguagliando la (A1.3a) alla (A1.3b) si ottiene il valore di equilibrio di V_n:

$$V_n=v\frac{1-v^n}{1-v} \qquad \text{(A1.4)}$$

Poiché v è minore di 1, il limite di v^n per n che tende ad ∞, tende a zero; avremo quindi:

$$V_\infty=\frac{v}{1-v}=\frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}=\frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1+i-1}{1+i}}=\frac{1}{i} \qquad \text{(A1.5)}$$

La (A1.1) quindi diventa:

$$P=\frac{CED}{i} \qquad \text{(A1.6)}$$

Appendice 2

A2 Derivazione della formula della *modified duration* e della convessità

Ricordiamo le definizioni di *modified duration* (MD) e di convessità (C) insieme alla formula del prezzo[51]:

$$MD \equiv -\frac{dP/di}{P} > 0 \tag{A2.1}$$

$$C \equiv \frac{d^2P/di^2}{P} > 0 \tag{A2.2}$$

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{n} F_t * (1+i)^{-t} \tag{A2.3}$$

Per determinare le formule relative alla *modified duration* e alla convessità è necessario determinare le derivate prima e seconda del prezzo rispetto al tasso di interesse:

$$\frac{dP}{di} = \sum_{t=1}^{n} (-t) * F_t * (1+i)^{-t-1} \tag{A2.4}$$

Dividendo per P e riarrangiando i termini della (A2.4) otteniamo:

$$\frac{dP/di}{P} = -\frac{1}{1+i} * \sum_{t=1}^{n} t * \frac{F_t * (1+i)^{-t}}{P} = -\frac{1}{1+i} * D$$

da cui:

$$MD \equiv -\frac{dP/di}{P} = \frac{1}{1+i} D \tag{A2.5}$$

Per determinare la derivata seconda facciamo la derivata prima della (A2.4):

$$\frac{d^2P}{di^2} = \sum_{t=1}^{n} (-t) * (-t-1) * F_t * (1+i)^{-t-2}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^2} * \sum_{t=1}^{n} t * (t+1) * F_t * (1+i)^{-t}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^2} * \sum_{t=1}^{n} (t^2 + t) * F_t * (1+i)^{-t} \tag{A2.6}$$

da cui dividendo per P si ottiene:

$$C \equiv \frac{d^2P/di^2}{P} = \frac{1}{(1+i)^2} * (D + D^2(0)) \tag{A2.7}$$